

Yöneylem Araştırması–I Dersi 2. Çalışma Soruları

1. Bir deri firması standart tasarımda el yapımı çanta ve bavul üretmektedir. Firma üretmekte olduğu her çanta başına 400TL, her bavul başına ise 200TL kar sağlamaktadır. Firma yapmış olduğu anlaşma gereğince bir mağazaya ayda 30 adet ürün temin etmeyi garanti etmiştir. Deri hammaddesi sağlayan tabakhane ise firmaya aylık olarak 80 m² deri sağlamaktadır. Firma sağlanan bu deri hammaddesinin mümkün olduğunca en az miktarını kullanmak istemekle birlikte, tabakhaneden daha fazla sipariş talebinde de bulunabilmektedir. Çanta üretiminde 2m², bavul üretiminde ise 8m² deri hammaddesi tüketilmektedir.

Geçmiş performans verilerini dikkate alan firmanın sahipleri ayda 20 çantadan fazla üretim gerçekleştirilemediğini belirtmektedir. Kâr maksimizasyonunu sağlayacak olan çanta ve bavul üretimi düzeylerini Simpleks Yöntemi ile bulunuz.

$$x_1 = \text{üretilecek çanta adedi}$$

$$x_2 = \text{üretilecek bavul adedi}$$

$$\text{Max. } Z = 400x_1 + 200x_2$$

$$x_1 + x_2 = 30 \text{ anlaşmadaki talep miktarı}$$

$$2x_1 + 8x_2 \geq 80 \text{ kullanılan deri miktarı (m}^2\text{)}$$

$$x_1 \leq 20 \text{ çanta}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 20 \text{ adet çanta}$$

$$x_2 = 10 \text{ adet bavul}$$

$$s_1 = 40 \text{ m}^2 \text{ fazla deri hammaddesi}$$

$$Z=10000\text{TL aylık kâr}$$

2. 3 farklı işlemle 3 farklı ürünün üretildiği bir ürün karışım problemini ele alalım. 3 işlem için gerekli sürelerin sınırı sırasıyla 430, 460 ve 420 dakika/gün, ve 3 ürünün birim kârları sırasıyla 3, 2 ve 5 TL'dir. 3 işlemin birimi başına düşen süreler dakika olarak şöyledir:

	Süreler			Gerekli (dk/gün) sürelerin sınırı
	1. ürün	2. ürün	3. ürün	
1. işlem	1	2	1	430
2. işlem	3	0	2	460
3. işlem	1	4	0	420

Problemi Simpleks Yöntemiyle çözüp Primal ve Dual çözümün ekonomik yorumlarınızı yapınız (Gölge fiyatlar, artık değişken, aylak değişkenlerin yorumu gibi...).

$$\text{Max. } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \text{ (1. İşlem)}$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460 \text{ (2. İşlem)}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420 \text{ (3. İşlem)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

şeklindedir.

Primal optimal çözüm

cj	3	2	5	0	0	0	
Temel	X1	X2	X3	S1	S2	S3	Çözüm sütunu
X2	-1/4	1	0	½	-1/4	0	100
X3	3/2	0	1	0	½	0	230
S3	2	0	0	-2	1	1	20
cj-zj	4	0	0	1	2	0	1350

1. ve 2. kaynaklar kıt, 3. kaynak âtıl

Primal ve Dual Çözümün Ekonomik Yorumları:

$x_1 = 0$ olduğundan optimal karışımında 1. ürün bulunmayacaktır. Bu 1. ürünün kârlı olmadığı anlamına gelir. Burada; 1.ürüne düşen maliyet > birim kâr demektir:

Yani; $z_1 = 1y_1 + 3y_2 + 1y_3 = 1*1 + 3* 2 + 1* 0 = 7\text{TL}$ 1.ürünün maliyeti

$Z_1 = 7, C_1 = 3\text{TL}$ $Z_1 > C_1$ x_1 , 1. faaliyet optimal değil

Burada ancak Z_1 in değerini düşürerek x_1 i karlı duruma getirebiliriz. Bunun içinde Z_1 deki y_1 , y_2 , y_3 'ün katsayıları olan ve 1. ürünü oluşturan 1., 2. ve 3. İşlem sürelerinin (kaynak kullanımlarının) indirgenmesiyle mümkün olabilir. Bunun için gölge fiyatları, dual çözüm ve kaynak fiyatlarını inceleyelim.

(Dual) Gölge Fiyatların; $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$ dan; $y_3 = 0$ olması 3. işlemin kullanımındaki bir indirimin etkisiz olacağını ifade eder. Çünkü birim maliyeti $y_3 = 0$ dır.

Diğer taraftan 1. ve 2. işlemleri inceleyecek olursak;

$y_2 = 2 > y_1 = 1$ olması; 2. işlemdeki bir indirimin 1. işlemdeki (kaynaktaki) indirime göre daha etkili olacağını ifade eder. Çünkü 2. işlemin fiyatı ve maliyeti daha yüksektir.

3. Bir kargo işletmesi, müşteri gönderilerini paketlediği kutularında, boşlukları doldurmak ve gönderileri sarsıntıdan korumak için elyaf, köpük ve karton malzeme kullanmaktadır. Bir kg. elyaf ile 4 standart kutu boşluğu, 1 kg. köpük malzeme ile 8 standart kutu boşluğu doldurulabilmektedir. Bir kg. karton malzeme ise bir standart kutuyu sabitlemek için özel siparişlerde kullanılmaktadır. Enaz 256 kutunun taşımadaki boşluğunu doldurmaya yetecek kadar elyaf, köpük ve karton malzemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Öte yandan elyaf ve köpük malzemelerin birer kilogramı sırasıyla 16 ve 32 cm³ hacim gerektirmekte olup, bu malzemeleri nemden korumak için kullanılan özel konteynerın hacmi 424cm³'tür.Karton malzeme için stoklamada özel bir gereklilik yoktur. Elyaf, köpük ve karton malzemenin kg. fiyatları sırasıyla 14, 16 ve 3 para birimdir. Toplam malzeme alım maliyetini enküçükleyecek şekilde, hangi malzemeden kaç kg. alınması gerektiğini bulunuz.

Sağ Taraf Sabitinin değişimine göre,

Temel değişken ve temel olmayan değişkenin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişmelere göre duyarlılık analizini yapınız.

Karar deęişkeni

x_i : i . tip malzemeden alınacak miktar (kg.) ($i = 1, 2, 3$ elyaf, köpük ve karton malzeme)

olarak tanımlanır.

Karşı gelen matematiksel model, kısıtlar ve amaç fonksiyonu ile birlikte aşağıdaki gibidir (karton malzeme için stok alanı ihtiyacı yoktur):

$$\begin{aligned}4x_1 + 8x_2 + x_3 &\geq 256 \\16x_1 + 32x_2 &\leq 424 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

kısıtları altında

$$\text{Enk } x_0 = 14x_1 + 16x_2 + 3x_3$$

Önceki örnekte olduğu gibi, modelin Simpleks Algoritması ile çözülebilmesi için önce kısıtların eşitlik haline getirilmesi gerekir. \leq şeklindeki kısıtların eşitlik haline getirilmesi için kısıtın küçük olan tarafına pozitif (+) katsayılı, \geq şeklindeki kısıtların eşitlik haline getirilmesi için ise kısıtın büyük olan tarafına negatif (-) katsayılı yeni bir değişkenin eklentisi gerekir. Buna göre yukarıdaki modelde her iki kısıta sırasıyla s_1 ve s_2 değişkenlerinin eklenmesi ile model aşağıdaki hale dönüşür:

s_1 ve s_2 değişkenlerine sırasıyla artık ve aylak değişken denir.

$$\begin{aligned}4x_1 + 8x_2 + x_3 - s_1 &= 256 \\16x_1 + 32x_2 &+ s_2 = 424 \\x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0\end{aligned}$$

kısıtları altında

$$\text{Enk } x_0 = 14x_1 + 16x_2 + 3x_3$$

Kargo şirketi 53/4 kg. köpük, 150 kg. ise karton almalıdır.

4. Aşağıda verilen problemin amaç fonksiyonu katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkilerini inceleyiniz.

$$Z_{\min} = 14X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 8X_4$$

$$X_3 \geq 40$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 85$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 320$$

$$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 \leq 410$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	A_1	A_2	S_1	S_2	
$4X_3$	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
$14X_1$	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
$0S_1$	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	70
$0S_2$	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	75
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
$C_j - Z_j$	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

5. Bahar mobilya şirketi, izleyen ay için almış olduğu özel bir sipariş gereği, diğer ürünlerinin yanında A ve B olarak tanımladığı ahşap el yapımı iki yeni ürün daha imal etmek istemektedir. Ürünler, montaj ve cilalama olmak üzere iki ana süreçten geçerek imal edilecek, daha sonra stoklanması için depoya gönderilecektir. Mevcut işgücü olanakları dikkate alınarak, iki ürün için montaj işlerine en fazla 82 saat, cilalama işlerine ise en fazla 112 saat ayrılabilmesi belirlenmiştir. Depoda bu ürünlerin stoklanması için ayrılacak yer ise toplamda en fazla 10 ürüne yetecek kadardır. A ürününün bir birim imalatı için 4 saat montaj ve 14 saat cila işçiliği, B ürünü için birim başına 10 saat montaj ve 8 saat cila işçiliği gerekmektedir. Ürünlerin bitmiş haldeki boyutları birbirine yakın olup, depoda birim başına 1 m2 stok alanı ayrılması yeterlidir. Satıştan elde edilecek birim kârlar ise, A için 40TL, B için 70TL olarak belirlenmiştir. Buna göre,

Montaj işçiliğinin 1 saati için ödenecek fiyatın ne olacağını,
Cilalama işçiliğinin 1 saati için ödenecek fiyatın ne olacağını,
Depoda 1 metrekairelik yer için ödenecek fiyatın ne olacağını bulunuz.

X_A ve X_B , A ve B ürünlerinden imal edilecek miktarları gösteren karar değişkenleri olmak üzere, asıl karar modeli

$$\text{Max. } Z = 40X_A + 70X_B$$

$$4X_A + 10X_B \leq 82 \text{ (montaj saati kısıtı)}$$

$$14X_A + 8X_B \leq 112 \text{ (cilalama saati kısıtı)}$$

$$X_A + X_B \leq 10 \text{ (depo yer kısıtı)}$$

$$X_A, X_B \geq 0$$

Kaynakların birim fiyatları sırasıyla y_1 , y_2 , y_3 olsun. Bahar Mobilyanın elinde bulunan kaynakların miktarları, 82 saat montaj işçiliği, 112 saat cilalama işçiliği ve 10 m2 depo alanıdır. Girişimci, mobilya firmasının A ve B ürünleri için kullanacağı tüm kaynakları satın almak istediğine göre, bu kaynakların hepsine ödemesi gereken fiyatı “Y” ile gösterirsek,
 $Y=82y_1 + 112y_2 + 10y_3$

Kaynak birim fiyatlarını belirlerken, göz önüne almamız gereken kısıtlar, ürünlerin satışından elde edilecek kazançlarla ilgilidir. Bahar Mobilyanın kaynaklarını satmaya ya da kiralamaya istekli olması için, kira bedelinin en az, mobilya şirketinin A ve B ürünlerini imal ettiğinde elde edeceği kazanç kadar olması gerekir. Yani, kaynak birim fiyatları öyle belirlenmelidir ki, Bahar Mobilya sahip olduğu kaynakları kullanarak ürün imal etmek yerine, girişimci firmaya satmaya ikna olsun. Bir diğer deyişle, kaynak ücretleri, mobilyacıyı satışa teşvik edecek kadar yüksek, fakat girişimciyi satın almaktan vazgeçirmeyecek kadar düşük olmalıdır.

A ürününü ele alalım. Bir birim A ürününü imal etmek için gerekli kaynaklar, 4 saat montaj işçiliği, 14 saat cilalama işçiliği ve 1 m2 depo alanıdır. Girişimcinin mobilya firmasına bu kaynak bileşimi için en az 40TL fiyat önermesi gerekir. Çünkü mobilya şirketi arzu ederse, bu kaynak bileşimini satmak yerine, 1 birim A ürünü elde etmek için kullanıp 40TL kâr elde edebilir. O zaman girişimcinin 1 adet A ürünü için kullanılan kaynakların değeri için en az 40TL ödemesi gerekir ki bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$4y_1 + 14y_2 + y_3 \geq 40$$

Yani, 1 birim A ürünü imal etmek için gereken girdilerin değerleri toplamının A ürününün kazancından fazla ya da eşit olması gerekir. Benzer şekilde, girişimci 1 adet B ürünü için kullanılan kaynakların toplam değeri için en az 70TL ödemelidir. Aşağıdaki kısıt 1 birim B ürünü imal etmek için gereken girdilerin değerleri toplamının B ürününün kazancından fazla ya da eşit olması gerektiği anlamına gelmektedir.

$$10y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 70$$

Kaynakların birim fiyatları negatif değer alamayacağından, izleyen işaret kısıtlarını da ekleyebiliriz:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Bütün bu yazdıklarımızı bir araya getirdiğimizde aşağıdaki doğrusal karar modelini elde ederiz ki, bu model asıl modelimizin dualidir.

$$\text{Min. } Y = 82y_1 + 112y_2 + 10y_3$$

$$4y_1 + 14y_2 + y_3 \geq 40$$

$$10y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 70$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Özetle, asıl model enbüyükleme amaçlı iken, ikil değişkenler modelin karşı gelen kaynaklarıyla ilgili fiyat düzeyinin araştırıldığı karar değişkenleri olmaktadır. İkil modelde i.nci ikil değişken, aslında i.nci kısıt ile ilişkilidir. Örneğimizde, y_1 montaj saati, y_2 cilalama saati, y_3 ise depo alanı ile ilişkili olan dual değişkenlerdir. İkil modeldeki kısıtlar ise, asıl modelin karar değişkenlerine karşı gelmektedir. Birinci dual kısıt A ürününün imalatını, ikinci ikil kısıt B ürününün imalatını göz önüne alarak oluşturulmuştur.

6. Kâr enbüyükleme amaçlı ve üç kısıtlı bir doğrusal karar modelinin eniyi değeri “50000” olarak elde edilmiştir. Eniyi çözümde kaynakların gölge fiyatları sırasıyla, 0, 20 ve 15’tir. İkinci kısıtın kaynak miktarının 750 saat olduğunu ve yapılan duyarlılık analizine göre ikinci kısıtın kaynak miktarının 600 ile 850 arasında kalması durumunda elde edilen temelin korunacağını varsayın. Eğer ikinci kaynağın miktarı 800 saate çıkarılırsa, elde edilecek enbüyük kâr ne olacaktır?

51000

7. Bir çiftlikte günde en az 800 kg özel bir karışımla yapılan yem kullanılmaktadır. Bu karışım, aşağıdaki tabloda verilen maddelerin belirtilen miktarları kullanılarak elde edilmektedir.

	1 kg yemde kullanılan miktarlar(kg)		Maliyet(TL/kg)
	Protein	Lif	
Mısır	0.09	0.02	0.3
Soya Unu	0.60	0.06	0.9

Bu ürünün bileşiminde en az %30 protein ve en çok da % 5 lif bulunması zorunludur. Firma minimum maliyetle günlük yem karışımını belirlemek istemektedir. Buna göre problemin DP modelini oluşturup grafik yöntemle çözünüz.

8. Bir şehirde her biri 1200 kişilik öğrenci kapasitesi olan üç ayrı lise bulunmaktadır. Şehir yönetimi şehri Kuzey, Güney, Doğu, Batı ve Merkez olarak beş ayrı bölgeye ayırmıştır. Bazı öğrenciler bölgelerinin dışındaki okullara gitmek durumundadırlar. Bu durumda okul yönetimleri öğrencilerin alacağı toplam mesafeyi en aza indirmek istemektedir. Gerekli olan doğrusal modeli kurunuz.

Bölgeler	Okullar ve Mesafeleri			Öğrenci Sayısı
	Merkez Lisesi	Batı Lisesi	Güney Lisesi	
Kuzey	8	11	14	700
Güney	12	9	-	300
Doğu	9	16	10	900
Batı	8	-	9	600
Merkez	-	8	12	500

9. Aşağıdaki modeli Başlangıç Simpleks tablosunu oluşturmak için standart şekilde yazınız.

$$\text{Min } Z = 5X_1 - 6X_2$$

Kısıtlayıcılar

$$9X_1 + 2X_2 \geq 36$$

$$X_1 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

10. Aşağıda verilen DP modelinin kanonikal (normal) şekilde yazılımından sonra dualini bulunuz.

$$\text{Max. } Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{kısıtlayıcılar } 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 40$$

$$3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

11. Aşağıda verilen DP problemini kanonik formda yazınız.

$$Z_{\min.} = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$10x_1 + 16x_2 + 8x_3 \leq 1500$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 120$$

$$x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ve } x_3 - \text{serbest}$$

12. Aşağıdaki verilen DP probleminin kanonik formdan yararlanarak dualini alın.

$$Z_{\max.} = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

13. Aşağıdaki modellerin çözümlerini inceleyiniz (Olurlu, Dejenere, Sınırsız, Seçenekli çözüm gibi.)

14.

$$\text{Maks. } Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Seçenekli optimal çözüm

$$\text{Maks. } Z = 2X_1 + X_2$$

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Sınırsız çözüm
